6^o Μάθημα: 12/11/2020

Παράδειγμα:

Έστω S ο χώρος των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$.
Αν $A = \int_0^1 dx$ να βρεθεί ο A^+

Λύση:

Ο τελεστής ορίζεται από την δράση του
Δηλ. $A|f\rangle = Af(x) = \int_0^1 f(x)dx$

Δίνεται $A = \int_0^1 dx$ κ' έχουμε $f(x) = |f\rangle$, $g^*(x) = \langle g|$
Τότε $\langle g|A|f\rangle = \int_0^1 g^*(x)\, Af\, dx = \int_0^1 g^*(x) \int_0^1 f(t)dt\, dx =$
$= \int_0^1 f(t)dt \int_0^1 g^*(x)dx$

$\langle Ag|f\rangle = \int_0^1 A^+ g f dx \quad A^+ = ?$

Έχουμε $\langle g|A|f\rangle = \int_0^1 f(t)dt \int_0^1 g^* dx \quad \left(= \int_0^1 g^* \int_0^1 f(t)dt\, dx \right)$

$= \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^1 g^* dx \right)}_{Ag^*} f dt = \int_0^1 Ag^* f dx$

Συνεπώς $\int_0^1 Ag^* f dt = \int_0^1 A^+ g f dt \Rightarrow A^+ = A$

Παράδειγμα:

Στο χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $I = (a,b)$ να βρεθεί ο προσαρτημένος του $L = \kappa \frac{d}{dx}$, $\kappa \in \mathbb{C}$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι $\langle g|f\rangle = \int_a^b g^* f dx$

Άρα $\langle g|L|f\rangle = \int_a^b g^* L f dx = \int_a^b g^* \kappa \frac{df}{dx} dx =$

$$= k\int_a^b g^* f' dx$$

$$\langle k^+ g | f\rangle = \int_a^b L^+ g^* f dx.$$

$$\langle g|L|f\rangle = k\int_a^b g^* f' dx = k\left[g^* f\Big|_a^b - \int_a^b g^{*\prime} f dx\right]$$

$$= k\left[g^*(b) f(b) - g^*(a)\cdot f(a)\right] - k\int_a^b g^{*\prime} f dx$$

Απαιτεώ $g^*(b) f(b) = g^*(a)\cdot f(a) =$

$$= \int_a^b \left(-k\frac{dg^*}{dx}\right) f dx = \int_a^b L^+ g^* f dx$$

Άρα $L^+ = -k^*\dfrac{d}{dx}$ με $g^*(b) f(b) = g^*(a)\cdot f(a)$

$$-k\frac{dg^*}{dx} = \left(-k^*\frac{dg}{dx}\right)^* = L^+ g$$

Άσκηση: Να βρεθεί ο προσαρτημένος του προηγούμενου παραδείγματος αν $k = k(x)$, $k\in\mathbb{C}$.
(Να συζητήσετε εις πιθανές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η $k(x)$)

Σημείωση: Η συνθήκη $f(b)\cdot g^*(b) = f(a)\cdot g^*(a)$ καλείται προσαρτημένη συνοριακή συνθήκη. Γενικά μπορούν να υπάρχουν παραπάνω από μια τέτοιες συνθήκες

Άσκηση: Να βρεθεί ο L^+ του $L = k\dfrac{d^2}{dx^2}$, $k\in\mathbb{C}$

Παρατήρηση:
Για πραγματικούς διανυσματικούς χώρους ο προσαρτημένος καλείται και ανάστροφος κ' γράφεται $A^+ = A^T$ δηλαδή
$\langle g|A|f\rangle = \langle f|A^+|g\rangle$

ΤΟΤΕ

a. ο A καλείται συμμετρικός αν $A^T=A$

b. ο A καλείται αντισυμμετρικός αν $A^T=-A$

c. ο A καλείται ορθογώνιος αν $A^T=A^{-1}$

Ιδιοτιμές και Ιδιοσυναρτήσεις

Ορισμός: Έστω ότι για τον τελεστή A, $A\neq I$ υπάρχει διάνυσμα $|f\rangle$: $A|f\rangle=\lambda|f\rangle$, $\lambda\in\mathbb{C}$ τότε το διάνυσμα $|f\rangle$ καλείται ιδιοδιάνυσμα ή ιδιοσυνάρτηση του A και λ αντίστοιχα ιδιοτιμή.

Παρατήρηση: Προφανώς αν $A=I$ κάθε διάνυσμα είναι ιδιοδιάνυσμα του με $\lambda=1$

Παράδειγμα:
Έστω ο τελεστής $A=-\frac{d^2}{dx^2}$ στον χώρο των συναρτή

σεων που έχουν όλες τις παραγώγους τους για $x\in[0,1]$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του τελεστή αν $u(0)=u(1)=0$

Λύση:
Λύνουμε στην ουσία το πρόβλημα

$$\left.\begin{aligned} Au=-\frac{d^2}{dx^2}u=\lambda u \\ u(0)=u(1)=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} u''+\lambda u=0 \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

Αναζητώ λύσεις της μορφής $u=e^{px}$
με $p^2+\lambda=0$

πρόβλημα συνοριακών τιμών
$-u''=\lambda u \Rightarrow u''+\lambda u=0$
$u(0)=u(1)=0$

$u''+\lambda u=0$
$u(0)=0$
$u'(0)=0$
$u=0$

Επειδή $\lambda\in\mathbb{R}$ διακρίνουμε περιπτώσεις:

a. $\lambda=0$: $u''=0 \Rightarrow u=Ax+B$.
συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} u(0)=0 \Rightarrow B=0 \\ u(1)=0 \Rightarrow A=0 \end{cases}$

άρα αν $\lambda=0 \Rightarrow u=0$

b. $\lambda<0 \Rightarrow \lambda=-|\lambda|$ τότε $u''-|\lambda|u=0$
$u(0)=u(1)=0$

Η λύση γράφεται $u(x)=Ae^{-\sqrt{|\lambda|}x}+Be^{\sqrt{|\lambda|}x}$
$(p^2-|\lambda|=0 \Rightarrow p^2=|\lambda|)$

Εφαρμόζω συνοριακές συνθήκες
$\begin{cases} u(0)=0 \\ u(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A\cdot e^{-L\sqrt{|\lambda|}}+Be^{L\sqrt{|\lambda|}}=0 \end{cases}$

ορίζω το σύστημα $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-L\sqrt{|\lambda|}} & e^{L\sqrt{|\lambda|}} \end{vmatrix} =$

$= e^{L\sqrt{|\lambda|}} - e^{-L\sqrt{|\lambda|}} \neq 0$
Συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση
$A=B=0$.

c. $\lambda>0$ $u''+\lambda u=0 \Rightarrow u=A\sin(\sqrt{\lambda}x)+B\cos(\sqrt{\lambda}x)$
$p^2=-\lambda \Rightarrow p=\pm i\lambda$

Εφαρμόζω συνοριακές συνθήκες.
$\begin{cases} u(0)=0 \\ u(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ A\sin(\sqrt{\lambda}L)=0 \end{cases}$ — $A=0$ ή $\sin(\sqrt{\lambda}L)=0$

Μη μηδενικές λύσεις

$\sin(\sqrt{\lambda} L)=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} L = n\pi$

$\lambda^2 = \frac{n^2\pi}{L^2}$

Συνεπώς $u(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

Εξίσωση γραμμική $\Rightarrow$ αν y_1, y_2 λύσεις
$c_1 y_1 + c_2 y_2$ επίσης λύση

άρα $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ λύση της εξίσωσης.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$u'' + \lambda u = 0$

$u(0) = u(L) = 0$

σειρά fourier

Άσκηση:

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $A = \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 1$, $0 \le x \le 1$.

αν $u(0) = u(1) = 0$. Να εξετάσετε αν ο τελεστής είναι αυτό-προσαρτημένος

Άσκηση:

Ομοίως για τον τελεστή

$A = \frac{d^2}{dx^2} + 2i\frac{d}{dx} + 1$

$i^2 = -1$